Concepts solutions
Théorie des jeux

M2 GADM

H. BELLEILI

Stratégie prudente: notion de maxmin

- Dans un jeu à deux joueurs par exemple, chaque joueur se pose la question de savoir quelle stratégie sera adoptée par l'autre pour réagir en conséquence. Mais il sait que l'autre est dans la même situation.
- Dans un jeu à somme nulle, on appelle "paiement minimum garanti du joueur 1,

  « la valeur de $\max_{a1} \min_{a2} u1(a1, a2)$ »
- C'est effectivement le paiement minimum garanti dans le sens où il existe une stratégie qui assure ce paiement au joueur,
- Cette stratégie, *$\mathrm{argmax}_{a1} \min_{a2} u1(a1,a2)$* est appelée stratégie prudente.

Jeu à somme nulle

	Min		
Max	3, −3	1, −1	8,-8
	4, −4	10, −10	0,0

	Min		
Max	3	1	8
	4	10	0

Le gain de l'un est la perte de l'autre
Question: Quelle option, devra choisir un agent rationnel ?
On considère les ***niveaux de sécurité*** de chacun des agents .

Si Max choisit la première ligne, quel que soit ce que fait Min, il fera au moins (au min) un gain de 1. En choisissant la deuxième ligne, il risque de faire un gain nul.
Le niveau de sécurité de Max est 1 et il est assuré par le choix de la première ligne (stratégie MaxMin),

Pour le joueur Min , en choisissant la première colonne, il n'aura pas à payer (à perdre) plus que 4, tandis que s'il choisit la seconde ou la troisième colonne, il risque de perdre respectivement 10 ou 8.
Le niveau de sécurité de l'agent Min est 4 et il est assuré par le choix de la première colonne. (Stratégie MinMax)

Stratégie prudente (2)

- Le concept de stratégie prudente peut également être utilisée dans des jeux à somme non nulle.
- Cela revient à supposer que le joueur 1 pense que le joueur 2 lui veut du mal !
- C'est le cas du dilemme du prisonnier:

Stratégie prudente dilemme du prisonnier

		Suspect ②	
		Se taire	*Dénoncer*
Suspect ①	*Se taire*	(-1,-1)	(-10,0)
	Dénoncer	(0,-10)	(-5,-5)

Le suspect ① pense que le suspect ② lui en veut. Il choisira donc toujours de le dénoncer : $\min_{a_2} u_1(Se\ taire, a_2) = -10$ *et* $\min_{a_2} u_1(Dénoncer, a_2) = -5$. *Se faisant, il va choisir lui aussi de dénoncer :* $\max_{a_1}(a_1, Dénoncer) = -5$. *La stratégie prudente du joueur ① est donc de "Dénoncer" et son "paiement minimum garanti" est alors* -5.

La notion de dominance

- La notion de dominance permet, en se basant sur le concept de rationalité, de réduire le champ des actions qui vont être analysées.

		Joueur ②		
		L	*M*	*R*
Joueur ①	*T*	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	B	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Comparons les stratégies M et R pour le joueur ②. On observe que :

— *Si le joueur ① joue T, la stratégie M donne 2 au joueur ② alors que R lui donne seulement 1.*

— *Si le joueur ① joue B alors, la stratégie M donne 1 au joueur ② alors que la stratégie R lui donne seulement 0.*

Ainsi, indépendamment de ce que fait le joueur ①, la stratégie M donne strictement plus au joueur colonne que la stratégie R.

Stratégie dominante

- *On dit qu'une stratégie s*1 domine *s2* si chaque résultat possible du joueur *i* jouant ***s1*** est préféré à chacun des résultats possibles du joueur *i* jouant s2.
- Un agent rationnel ne joue jamais une stratégie dominée

Stratégie dominante: formellement

- Notations: on note x_{-i} les stratégies choisies par tous les joueurs excepté le joueur ***i,***
- Étant donné un jeu sous forme stratégique $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1..N})$ on dit que la stratégie x_i^0 est strictement dominée par la stratégie x_i^1 pour le joueur «***i***» ssi:

$$\forall x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_N, u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots x_N) < u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \dots x_N)$$

Que l'on peut écrire plus simplement: $\forall x_{-i}, u_i(x_{-i}, x_i^0) < u_i(x_{-i}, x_i^1)$

Contre toute « défense », jouer la stratégie x_i^1 donne toujours strictement plus au joueur ***i*** que jouer la stratégie x_i^0

Notion de dominance faible

- On dit qu'une stratégie x_i^0 est faiblement dominée par une stratégie x_i^1 pour le joueur i ssi:

$$\forall x_{-i}, u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$$

- Jouer la stratégie x_i^1 donne toujours au moins autant au joueur i que de jouer x_i^0

Dilemme du prisonnier

- Quelle est la stratégie dominante?

j\i	D	C
D	2,2	4,1
C	1,4	3,3

- Dans l'exemple la stratégie D est dominante pour chacun des joueurs?

Dominance stricte vs faible

- Lorsque la stratégie n'est pas strictement préférée alors elle a une dominance faible,
- S'il existe une stratégie fortement dominante (au sens stricte), elle est unique.
- S'il existe une stratégie faiblement dominante elle n'est pas unique.

Exemple: renvoie de l'ascenseur

Deux inconnus se retrouvent au rez-de-chaussée d'une grande tour devant un petit ascenseur à une seule place dont la porte est ouverte. Il n'y a pas de bouton pour le rappeler quand il sera monté. Les deux joueurs ont deux solutions : trahir ou coopérer. Si ils coopèrent tous les deux, un joueur monte puis renvoie l'ascenseur, les deux joueurs gagnent. Si un joueur coopère et l'autre trahit, le joueur qui trahit prend l'ascenseur, gagne, et ne le renvoie pas. Si les deux joueurs trahissent, aucun ne cède et ils sont obligés de monter à pied...les deux perdent.

		Joueur ②	
		Trahir	Coopérer
Joueur ①	Trahir	(0,0)	(1,0)
	Coopérer	(0,1)	(1,1)

Toutes les stratégies sont faiblement dominantes, elles ne sont pourtant pas équivalentes!

Processus à dominance successives

Å En fait l'équilibre en stratégie dominante existe rarement et il faut faire appel à d'autres types de solutions à un jeu.

Å On peut utiliser la solution suivante : si un joueur a une stratégie dominante, on peut alors s'attendre à ce qu'il la choisisse, et comme l'autre joueur est capable d'anticiper ce choix, celui-ci choisit de la contrer avec sa *meilleure réponse*.

Exemple

Å Soit la matrice de jeux suivante:

		Joueur2		
		s_{21}	s_{22}	s_{23}
Joueur1	s_{11}	4, 3	5, 1	6, 2
	s_{12}	2, 1	8, 4	3, 6
	s_{13}	3, 0	9, 6	2, 8

Å Il n'ya pas de stratégie dominante.

Å On remarque que la stratégie s22 est strictement dominée par la stratégie s23

Å Puisque l'agent 2 est rationnel il ne jouera pas cette stratégie, on peut donc l'enlever de la matrice

Å Dans la matrice restante la stratégie s11 est devenue dominante

Å le Joueur2 aligne sa meilleure stratégie face à cela, soit s21 qui lui procure un gain de 3.

Å La solution d'un tel jeu est alors l'équilibre (s11, s21) et il procure des gains de (4, 3).

Å Il a été obtenu via un processus de *dominance successive.*

Remarques

Å Lorsqu'il ya plusieurs stratégies dominées strictement, l'ordre d'élimination aboutit vers un unique résultat: on dit que le jeu est solvable par dominance

Å Lorsque il y a plusieurs stratégies dominées faiblement (non strictement), le résultat de l'élimination successives de ces stratégies dépend de l'ordre dans lequel ces stratégies sont éliminées.

Exemple: cas 2

		Joueur 2		
		L	*C*	*R*
Joueur 1	*T*	(1,2)	(2,3)	(0,3)
	M	(2,2)	(2,1)	(3,2)
	B	(2,1)	(0,0)	(1,0)

ordre d'élimination	*résultat*	*paiement final*
T,R,B,C	*ML*	(2,2)
B,L,C,T	*MR*	(3, 2)

Équilibre de Nash

En général, deux stratégies *s*1 et *s*2 sont dites en équilibre de Nash, si:

- Sous la supposition que *i* joue s1, *j* ne peut faire mieux qu'en jouant s2; et
- Sous la supposition que *j* jouant s2, *i* ne peut faire mieux qu'en jouant s1,
- Aucun agent n'a intérêt à dévier de l'équilibre de Nash
- Malheureusement :
  - Un tel équilibre peut ne pas exister;
  - Il peut y avoir plusieurs équilibres

Exemple

		Entreprise2	
		produit	*ne produit pas*
Entreprise1	*produit*	−3, −2	10,0
	ne produit pas	0, 8	0,0

Ce jeu comporte 2 équilibre de Nash, (ne produit pas, produit) dont les gains sont (0,8) et (produit, ne produit pas) dont les gains sont (10,0)

Equilibre de Nash (suite)

- l'équilibre de Nash constitue une combinaison de stratégies où chaque joueur maximise ses gains compte tenu de l'action supposée des autres.
- Il a donc une propriété de "stabilité" qui est satisfaite pour chacun des joueurs, c'est pourquoi on parle d'"équilibre".
- L'équilibre de Nash est le seul concept solution lorsqu'il n'y a ni stratégie dominante ni stratégie dominée

Équilibre de Nash: formellement

- **Définition 1**: un profil de stratégies $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ est un équilibre de Nash du jeu sous forme stratégique Γ ssi,

$$\forall i \in N, \forall x_i \in X : u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$$

- Une autre manière de définir l'équilibre de Nash est d'utiliser le concept de **meilleur réponse** (MR)
- **Définition 2**: On appelle correspondance de **meilleure réponse** du joueur ***i*** la correspondance qui à chaque vecteur de stratégies des autres joueurs associe les stratégies qui maximisent le paiement du joueur ***i***

$$MR_i : x_{-i} \; \alpha \; \arg\max_x u_i(x, x_{-i})$$

- Cette correspondance est bien définie lorsque l'ensemble des stratégies est fini, et lorsque le minimum est unique.

Équilibre de Nash (suite)

Å Un équilibre de Nash est un point fixe de la correspondance de meilleur réponse

Å Définition 3: $x^* = (x_i^*)$ est un équilibre de Nash ssi:

$$\forall i, \forall x_i \in X_i, u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$$

C'est-à-dire: $\forall i, x_i^* \in MR_i(x_{-i}^*)$

Å On peut voir qu'il existe des jeux pour lesquels il n'existe pas d'équilibre de Nash, d'autres où il en existe plusieurs

Exemple 1

Å Dilemme du prisonnier

		Suspect ②	
		Se taire	Dénoncer
Suspect ①	Se taire	(-1,-1)	(-10,0)
	Dénoncer	(0,-10)	(-5,-5)

$D \mapsto^{MR_1} D \mapsto^{MR_2} D \Rightarrow (D, D)$ unique équilibre de Nash

$(ST \mapsto^{MR_1} D \mapsto^{MR_2} D)$

Exemple 2

— Jeu du carrefour : 2 joueurs, pas de code de la route, les 2 voitures arrivent à la même vitesse, 2 solutions pour chaque voiture : passe (P) ou stop (S)

		Joueur ②	
		P	S
Joueur ①	P	(-1,-1)	(2,1)
	S	(1,2)	(0,0)

$P \mapsto^{MR_1} S \mapsto^{MR_2} P$ et $P \mapsto^{MR_2} S \mapsto^{MR_1} P \Rightarrow$ 2 équilibres de Nash !

Comment choisir ?

Jeu de la distinction du bourdieu

Le joueur ① content quand il fait la même chose que ②, mais ② n'est pas content si ① fait comme lui (2 situations : pile et face)

		Joueur ②	
		P	F
Joueur ①	P	(1, -1)	(-1, 1)
	F	(-1, 1)	(1,-1)

Å Ce jeu n'a pas d'équilibre en stratégie pure

Equilibre en stratégie mixte

- Un des problèmes inhérents au concept d'équilibre de Nash en stratégies pures est que pour certains jeux, de tels équilibres n'existent pas.
- La raison pour laquelle on n'a pas d'équilibres est la suivante : la notion d'équilibre de Nash en stratégies pures suppose que chaque joueur connait les stratégies des autres joueurs. Or, nous sommes dans des jeux où chaque joueur a intérêt à cacher sa stratégie, ou à bluffer.
- En effet, dans les jeux "pile ou face" par exemple on n'utilise pas toujours la même stratégie, et on ne connaît pas non plus à l'avance celle de l'adversaire.
- Les stratégies mixtes, ou aléatoires, vont permettre de représenter ces possibilités de bluff, ou de jouer aléatoirement.

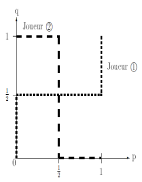
- Une stratégie mixte est une distribution de probabilités sur l'ensemble des stratégies pures (i.e. des actions).

Interprétation de l'équilibre en stratégie mixte

- Une stratégie mixte peut être interprétée comme :
- Une croyance sur la façon dont joue un joueur,
- Une façon dont les stratégies pures sont distribuées au sein d'une population.

Équilibre en stratégie mixte
Jeu distinction de Bourdieu

- Soit p la probabilité pour que le joueur 1 joue P et 1-p pour qu'il joue F.
- Soit q la probabilité pour que le joueur 2 joue P et 1-q pour qu'il joue F.
- Étudions les meilleures réponses de chacun des deux joueurs (on cherche la meilleure stratégie mixte d'un joueur, à stratégie mixte de l'autre joueur fixée)
- Pour le joueur 1, jouer:
  - P lui donne un paiement espéré:
    u1(P,P)*Pr(J2 joue P)+ u1(P,F)*Pr(J2 joue F)= 1*q+(-1)*(1-q)=2q-1
  - F lui procure un paiement espéré: (-1)*q+1*(1-q)=1-2q
- Ainsi: si P est préféré à F alors 2q-1>1-2q $\Rightarrow$ q>1/2 et p=1
- si F est préféré à P alors 1-2q>2q-1 et donc q<1/2 et p
- Si $P \approx F$ alors 1-2q=2q-1 et donc q=1/2 et p $\in$ [0,1]
-
- Même raisonnement pour le joueur 2 et on aura:
- si F est préféré à P alors 2p-1>1-2p $\Rightarrow$ p>1/2 et q=0
- si P est préféré à F alors 1-2p>2p-1 et donc p<1/2 et q=1
- Si $P \approx F$ alors 1-2p=2p-1 et donc p=1/2 et q $\in$ [0,1]



- Le point d'intersection entre ces deux correspondance de meilleur réponse est donc unique et égal à (1/2,1/2). Car jeu symétrique

Equilibre en stratégie mixte

- Exemple :
  - le jeu *pile ou face* qui est un jeu à somme nulle ne possèdant pas d'équilibre de Nash en stratégie pure,
  - Le jeux de mourre à deux doigts: deux joueurs O et E montrent simultanément un ou deux doigts. Soit f le nombre total des doigts. Si le nombre est impaire O reçoit f € de E et si f est pair E reçoit f € de O
- La théorie des jeux peut déterminer la meilleure stratégie contre un joueur rationnel et le gain espéré pour chaque joueur
- On fait appel à la stratégie mixte:
- chaque joueur associe une probabilité *pi* à la stratégie *si* et laisse au mécanisme aléatoire le soin de décider.
- Dans ce contexte, chaque joueur vise à maximiser ses gains espérés en choisissant la meilleure loterie possible, autrement dit la meilleure stratégie mixte.

Méthode 2

Joueur1 \ Joueur2	*Pile*	*Face*
Pile	$1,-1$	$-1,1$
Face	$-1,1$	$1,-1$

jeu de pile ou face (matching pennies)

Å Jeu à somme nulle ne possédant pas d'équilibre

Å le Joueur1 a une probabilité *p* de choisir *Pile* et une probabilité de *1 − p* de choisir *Face*.

Å Pour le Joueur2 les deux probabilités sont respectivement de *q* et *1−q*

Å Le gain espéré du Joueur1 est reflétée par la fonction GE1 linéaire en p suivante:

$$GE_1 = pqu_1(Pile, Pile) + p(1-q)u_1(Pile, Face) + (1-p)qu_1(Face, Pile) + (1-p)(1-q)u_1(Face, Face)$$

Maximiser ce gain espéré revient donc à chercher d(GE1)/dp = 0 soit :

$$qu_1(Pile, Pile) + (1-q)u_1(Pile, Face) = qu_1(Face, Pile) + (1-q)u_1(Face, Face)$$

En remplaçant les ui par leurs valeurs dans la matrice

$$q-(1-q) = -q+(1-q)$$

Soit alors $q = 1/2$.

Joueur1 \ Joueur2	*Pile*	*Face*
Pile	$1,-1$	$-1,1$
Face	$-1,1$	$1,-1$

$$GE_1 = pqu_1(Pile, Pile) + p(1-q)u_1(Pile, Face) + (1-p)qu_1(Face, Pile) + (1-p)(1-q)u_1(Face, Face)$$

Exemple (suite)

Å Le même raisonnement pour le Joueur2 d(GE2)/dp = 0) nous donne p = 1/2.

Å Le résultat (1/2,1/2) est appelé *équilibre en stratégies mixtes* et il correspond au fait que l'un ou l'autre des joueurs choisisse une fois sur deux « pile », et une fois sur deux « face ».

Conclusion

Å L'algorithme général pour trouver des équilibres en stratégies mixtes dans les jeux à somme nulle se complique quand il y a n actions possibles.

Å On fait appel à la programmation linéaire en nombres entiers en formalisant le problème en une fonction objective et des contraintes linéaires

Exercices

Pour chacun des jeux suivants,

- 1. faites une analyse informelle pour déterminer ce que chacun des agents doit faire ;
- 2. classez les préférences que les agents ont relativement aux conséquences (outcomes) ;
- 3. déterminez quelle(s) stratégie(s) sont fortement ou faiblement dominées
- 4. identifiez le ou les équilibres de Nash.

Game A

	B	F
B	2,1	0,0
F	0,0	1,2

Game B

	N	S
N	2,2	-1,-1
S	-1,-1	1,1

L'optimum du Paréto

- En économie, l'optimum de Pareto, introduit par l'économiste Vilfredo Pareto dans son *Manuel d'économie politique*, est un état économique dans lequel il n'est plus possible d'améliorer la situation d'un individu sans dégrader celle d'un autre au moins.
- La notion d'optimum de Pareto est un concept fondamental de l'économie où les ressources disponibles d'une économie sont utilisées de façon optimale et où il est impossible d'arbitrer en faveur d'un acteur économique sans en pénaliser un autre.
- L'optimum de Pareto se préoccupe également de savoir dans quelles conditions il est possible d'assurer le maximum de satisfaction aux individus qui composent la société.

Intérêt du l'optimum au sens du pareto

- On l'utilise dans la décision multi critère où il n'est pas possible d'optimiser un critère sans pénaliser un autre.
- Dans ce cas on essaye de trouver un optimum au sens du pareto

dilemme du prisonnier

- L'action rationnelle individuelle est D. ceci garanti un résultat pas plus mauvais que 2 , 2
- tandis que , coopérer garanti un résultat de 1.
- En fait (D,D) est la meilleure réponse à toutes les stratégies: les 2 obtiennent 2
- Intuitivement, ceci n'est pas la meilleure stratégie. S'il coopèrent tous les deux → 3.
- (C,C) procure le bien être social correspondant à la stratégie qui maximise les gains de tout le monde
- Il y a un ensemble de stratégies pareto optimal appartenant à la frontière du Pareto: {(C,C),(D,C),(C,D)}
- La stratégie dominante pour les deux joueurs est D
- Stratégie (D,D) est un équilibre de Nash

- **La particularité de ce jeu est que le meilleur choix n'est pas le choix rationnel: même si (C,C) domine au sens du pareto (D,D), mais le joueur joue D car elle est dominante**

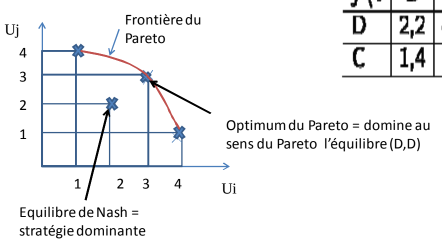
j\i	D	C
D	2,2	4,1
C	1,4	3,3

D: Avouer

C: se taire (coopérer)

Représentation graphique

j\i	D	C
D	2,2	4,1
C	1,4	3,3



Fin concepts solutions